Esistenza di soluzioni e principio del massimo debole
Complementi ed esercizi .

1. Operatori con potenziale

Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$, $V \in L^\infty(\Omega)$ ed $f \in L^2(\Omega)$. Diciamo che $u \in H^1_0(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\Delta u + Vu = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega),$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega V(x) u \varphi \, dx = \int_\Omega f(x) \varphi \, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Esercizio 1. *Dati un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, una funzione nonnegativa $V \in L^\infty(\Omega)$ ed una $f \in L^2(\Omega)$, mostrare che esiste un'unica soluzione debole del problema*

$$-\Delta u + Vu = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

Mostrare che se $f \geq 0$, allora anche $u \geq 0$.

Esercizio 2. *Dati un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, due funzioni nonnegative $0 \leq v \leq V \in L^\infty(\Omega)$ ed una funzione $f \in L^2(\Omega)$, consideriamo le soluzioni deboli u e U di*

$$-\Delta u + vu = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega),$$

$$-\Delta U + VU = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad U \in H^1_0(\Omega).$$

Mostrare che $U \leq u$.

2. Problemi ellittici in $\mathbb{R}^d$

Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Diciamo che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ è una soluzione debole del problema

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d),$$

se

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi \, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Esercizio 3. *Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.*

(i) Mostrare che esiste un'unica funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ che minimizza in $H^1(\mathbb{R}^d)$ il funzionale

$$J_f(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + u^2 \big) \, dx - \int_\Omega u f \, dx.$$

(ii) Mostrare che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ è l'unico minimo di J_f se e solo se u è soluzione (in senso debole $H^1(\mathbb{R}^d)$) del problema

$$-\Delta u + u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

(iii) Mostrare che

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) \, dx = \int_\Omega u f \, dx.$$

(iv) Mostrare che se $f \geq 0$, allora anche $u \geq 0$.

3. Problema dell'ostacolo

Sia B_1 la palla unitaria in $\mathbb{R}^d$ e sia $\Phi \in C^\infty$ una funzione tale che

$$\{\Phi > 0\} \Subset B_1.$$

Esercizio 4. *Mostrare che esiste un'unico minimo del problema varizionale*

$$\min\Big\{\int_{B_1} |\nabla u|^2\,dx \ :\ u \in H^1_0(B_1),\ u \ge \Phi \quad in \quad B_1\Big\}.$$

Mostrare che $u \ge 0$ in B_1.

Esercizio 5. *Siano Φ e Ψ due funzioni C^∞ tali che*

$$\Psi \ge \Phi \qquad e \qquad \{\Psi > 0\} \Subset B_1.$$

Siano u e v i minimi di

$$\min\Big\{\int_{B_1} |\nabla u|^2\,dx \ :\ u \in H^1_0(B_1),\ u \ge \Phi \quad in \quad B_1\Big\},$$
$$\min\Big\{\int_{B_1} |\nabla v|^2\,dx \ :\ v \in H^1_0(B_1),\ u \ge \Psi \quad in \quad B_1\Big\}.$$

Mostrare che $v \ge u$.

Esercizio 6. *Sia $u \in H^1_0(B_1)$ il minimo di*

$$\min\Big\{\int_{B_1} |\nabla u|^2\,dx \ :\ u \in H^1_0(B_1),\ u \ge \Phi \quad in \quad B_1\Big\}.$$

Mostrare che per ogni funzione $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$, $\varphi \ge 0$, si ha

$$\int_{B_1} \nabla u \cdot \nabla \varphi \ge 0.$$

4. Funzioni subarmoniche e funzioni superarmoniche

Definizione 7. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(\Omega)$ una funzione.*

- *Diremo che u è una funzione superarmonica in Ω se*
$$\int_{B_1} \nabla u \cdot \nabla \varphi \ge 0,$$
per ogni funzione $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$ tale che $\varphi \ge 0$ in Ω.
- *Diremo che u è una funzione subarmonica in Ω se*
$$\int_{B_1} \nabla u \cdot \nabla \varphi \le 0,$$
per ogni funzione $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$ tale che $\varphi \ge 0$ in Ω.

Esercizio 8. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_0(\Omega)$. Mostrare che:*

- *se u è superarmonica, allora $u \ge 0$ in Ω;*
- *se u è subarmonica, allora $u \le 0$ in Ω.*